Anhang zum Vortrag „Informatischen Hochleistern über die Schulter geschaut - Was können schwache Problemlöser lernen - Ein Lehrvideo“

Bertold Kujath

Aufgabentext aus der Studie im Original

3-Färbung eines 2 * n-Rechtecks

In einem 2*n-Rechteck soll jedes 1*1-Quadrat gefärbt werden. Dabei sollen an den Kanten zusammenliegende Quadrate unterschiedliche Farben haben, insgesamt gibt es drei verschiedene Farben: weiß, grau und schwarz. Die untere Hälfte des längs liegenden Rechtecks ist bereits gefärbt, und zwar mit der Farbensequenz $C_1,...,C_N$. Wieviele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es nun, die obere Hälfte zu färben? Diese Anzahl hängt von der Farbsequenz $C_1,...,C_N$ der unteren Hälfte ab.

Beispiel:
Sei n = 4 und die untere Sequenz sei (schwarz, weiß, schwarz, grau). Dann gibt es in diesem Fall insgesamt sieben verschiedene Arten, die obere Hälfte korrekt zu färben:

(weiß, grau, weiß, schwarz)
(weiß, schwarz, grau, weiß)
(weiß, schwarz, grau, schwarz)
(weiß, schwarz, weiß, schwarz)
(grau, schwarz, grau, weiß)
(grau, schwarz, grau, schwarz)
(grau, schwarz, weiß, schwarz)

Sieben ist allerdings weder die maximale noch die minimale Anzahl der Möglichkeiten....

Welche ist die minimale und welche die maximale Anzahl von Möglichkeiten in Abhängigkeit von der Länge n?

Wie muss die untere Farbsequenz beschaffen sein, dass man zum einen die minimale und zum anderen die maximale Anzahl von Möglichkeiten oben hat?

Lösungsdiskussion

Minimalfall: Die minimale Anzahl von Färbemöglichkeiten wird erreicht, wenn in der unteren Hälfte eine regelmäßige Sequenz aller 3 Farben vorliegt, beispielsweise schwarz, weiß, grau, schwarz, weiß, grau usw. Die Anzahl der Färbemöglichkeiten errechnet sich dann aus der Länge *n* nach der Formel n+1.

Maximalfall: Besteht die untere Hälfte nur aus 2 Farben im Wechsel, etwa schwarz, weiß, schwarz, weiß usw., erhält man oben die maximale Anzahl der Färbemöglichkeiten, die sich mittels der Länge *n* aus der Formel Fibonaccizahl von n, also F(n) errechnet. Diese Formel kann in Abhängigkeit der Definition von F(0) und F(1) leicht variieren.

Ermittlung der unteren Farbsequenzen

Um bei der Problembearbeitung zielgerichtet nur auf die relevanten Fälle fokussieren zu können und nicht unspezifisch alle theoretisch möglichen unteren Farbsequenzen betrachten zu müssen, bedarf es der Erkenntnis darüber, welche Eigenschaften der unteren Farbfolgen sich in welcher Weise auf die Anzahl der Färbemöglichkeiten in der oberen Hälfte auswirken. Hierbei kam bei vielen der Hochleister die Vorstellung zum Tragen, die untere Hälfte in Bezug auf die jeweilige Anzahl der Färbemöglichkeiten oben sequentiell von links nach rechts einzufärben und somit eine untere Farbfolge mit den gewünschten Eigenschaften zu konstruieren. Entscheidungsgrundlage für die jeweils nächste Farbe unten war jedes Mal, wie viele Färbemöglichkeiten daraus in dem Quadrat direkt darüber resultieren. Die dabei eingesetzte Schlüsselerkenntnis aus der Problemanalyse ist in Abbildung A1 erläutert.

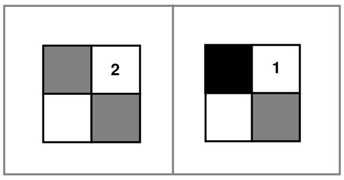

Abbildung A1: Diagonalbeziehung, **links:** Maximalfall**, rechts:** Minimalfall

Wenn, wie in der Abbildung A1 links am Beispiel der grau gefärbten Quadrate gezeigt, im Rechteck zwei in dieser Weise diagonal zueinanderliegende Quadrate dieselbe Farbe haben, hat man im davon eingeschlossenen oberen Quadrat zwei Färbemöglichkeiten, nämlich jeweils die beiden anderen Farben. Im rechts dargestellten Fall, wenn beide Quadrate ungleich gefärbt sind, dagegen nur eine Möglichkeit. Soll nun beispielsweise die untere Farbfolge für den Maximalfall konstruiert werden, entscheidet man sich im als nächstes einzufärbenden unteren Quadrat immer für diejenige Farbe, mit der die Mehrzahl aller oberen Folgen bis dahin endet. Überträgt man diese Eigenschaft auf die während der Problembearbeitung von Hochleistern eingesetzte Baumstruktur, bedeutet das: soll die obere Hälfte so viele Farbsequenzen wie möglich haben, muss bei der Konstruktion der unteren Farbsequenz als nächstes immer diejenige Farbe genommen werden, bei der sich im Baum als Konsequenz häufiger zwei Verzweigungen ergeben. Beispielsweise muss in der Skizze des Teilnehmers 31 in Abbildung A2 (links) das dritte Quadrat unten wieder weiß gefärbt werden, da in der zweiten Ebene des Baumes mehr Knoten weiß als schwarz gefärbt sind. Dieses Prozedere wiederholt angewendet ergibt dann die Farbfolge weiß, schwarz, weiß, schwarz usw. in der unteren Hälfte des Rechtecks.

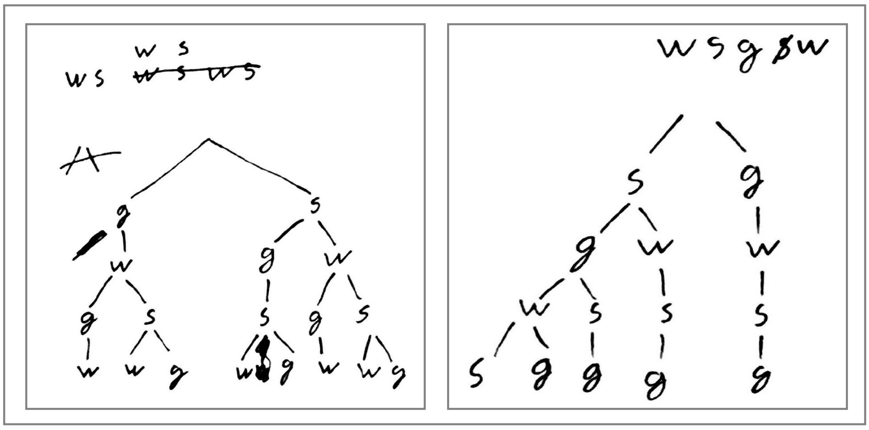

Abbildung A2: Skizzen des Teilnehmers T31 zur Ermittlung der unteren Farbsequenz
links: im Maximalfall und **rechts:** im Minimalfall

Analog dazu muss für den Minimalfall unten immer die Farbe genommen werden, die so häufig wie möglich nur eine Verzweigung zulässt. In der Skizze des Teilnehmers 31 in Abbildung A2 (rechts) muss daher das dritte untere Quadrat nun grau gefärbt werden, weil in der zweiten Ebene des Baumes grau weniger häufig als weiß vorkommt. Somit ergibt sich als untere Farbsequenz die Farbfolge weiß, schwarz, grau, weiß, schwarz, grau usw.

Ermittlung der Formel

Im Minimalfall ist die Formel für die obere Anzahl der Färbemöglichkeiten, nämlich n+1, offensichtlich und direkt entweder aus der Baumstruktur selbst ablesbar oder durch eine einfache Zahlenreihe der Färbemöglichkeiten in Abhängigkeit von der Länge *n* herleitbar. Bei komplizierteren Zusammenhängen wie hier beim Maximalfall – die Formel lautet hier vereinfacht F(n) – führt eine abstraktere Herangehensweise in der Regel schneller zum Ziel. Diejenigen Hochleister, die mit der hier vorgestellten Baumstruktur gearbeitet haben, haben diese analysiert und hinterfragt, wie sich die Anzahlen der einzelnen Farben auf einer Ebene jeweils aus den Anzahlen der Ebene davor errechnen lassen. Dabei wurden zunächst rekursive Grundgleichungen erstellt. In Abbildung A3 links ist die betreffende Skizze des Teilnehmers T31 abgebildet. T31 hatte als untere Farbfolge die Sequenz weiß, schwarz, weiß, schwarz usw. für das Maximum ermittelt. Rechts sind die entsprechenden Gleichungen des Teilnehmers T10 zu sehen, der eine ähnliche Herangehensweise zeigte. T10 hatte zwischenzeitlich die drei zur Verfügung stehenden Farben durch die Ziffern 0, 1 und 2 ersetzt.

$$\cancel{ws_n = g_{n-1} + ws_{n-1}}$$
$$ws_n = g_{n-1} + ws_{n-1}$$
$$g_n = ws_{n-1}$$

$$m_2(n) = m_{10}(n-1)$$
$$m_{01}(n) = m_{01}(n-1) + m_2(n-1)$$
$$m_{01}(0) = m_2(0) = 1$$

Abbildung A3: rekursive Grundgleichungen **links:** des Teilnehmers T31 und **rechts:** des Teilnehmers T10

Beispielsweise errechnet sich hiernach die Anzahl der auf grau (g) endenden oberen Farbfolgen auf einer Ebene aus der Anzahl der auf weiß (w) oder schwarz (s) endenden Farbfolgen der Ebene davor. Sowohl der Teilnehmer T10 als auch der Teilnehmer T31 bildeten mittels dieser Formeln Zahlenreihen, in denen sie dann das Bildungsgesetz der Fibonaccizahlen erkannten.